Les points fixes d'une application affine.

par
François Rideau

29 octobre 2005

1 Introduction

On sait qu'une application affine a *en général* des points fixes qui s'ils existent forment une sous-variété affine. Le but de cet article est de justifier une construction de ces points dans le cas du plan affine réel. Cette construction est connue depuis fort longtemps, on peut en trouver trace dans le livre de Rouché et Comberousse datant de 1900 ([4],Note III, Lemme 42, page 628) où ceux-ci donnent leur construction un peu redondante dans le cadre de la géométrie du triangle très à la mode à l'époque sans d'ailleurs trop se préoccuper de savoir si la dite application a oui ou non des points fixes. Plus près de nous, la même construction est justifiée par le grand Coxeter lui-même ([1],page 73). Il ne la démontre que pour une similitude où on est assuré par avance de l'existence et de l'unicité du point fixe mais en fait cette construction reste valable en général pour toute bijection affine ayant un unique point fixe. De plus Coxeter donne la *bonne* construction exécutée sur un parallélogramme et non sur un triangle car on a besoin seulement des 2 directions définies par les côtés du parallélogramme et non des 3 définies par les côtés d'un triangle !

2 Les points fixes d'une application affine.

On a le résultat fondamental suivant qu'on peut trouver par exemple dans ([5] page 19) ou bien dans ([2] page 69) :

Théorème 1. *Soit*

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

une application affine d'un espace affine $(\mathcal{E}, E)$ *(de dimension finie sur un corps* $\mathbb{K}$*) dans lui-même.Alors :*

- *Si* f *a un point fixe* o*, l'ensemble* $Fix(f)$ *des points fixes de* f *est un sous-espace affine de* $\mathcal{E}$ *de direction* $Ker(\overrightarrow{f} - id_E)$.
- f *a un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de* $\overrightarrow{f}$*, ce qui équivaut à :* $Ker(\overrightarrow{f} - id_E) = \{0\}$.

Démonstration. • Soit $x \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ox}$, i.e : $x = o + \overrightarrow{u}$. On a :

$$f(x) = f(o + \overrightarrow{u}) = f(o) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = o + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$$

D'où :

$$\overrightarrow{xf(x)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}$$

Ainsi $x \in Fix(f)$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{u} \in Ker(\overrightarrow{f} - id_E)$$

ce qui montre le premier point.

• Soit $a \in \mathcal{E}$ un point quelconque. Si on pose : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ax}$, on a comme précédemment :

$$x = a + \overrightarrow{u}$$

et

$$f(x) = f(a + \overrightarrow{u}) = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$$

Donc

$$\overrightarrow{xf(x)} = \overrightarrow{af(a)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}$$

Trouver un point fixe $x = a + \overrightarrow{u}$ de f revient donc à trouver $\overrightarrow{u} \in E$ tel que :

$$\overrightarrow{f(a)a} = (\overrightarrow{f} - id_E)(\overrightarrow{u})$$

et l'existence et l'unicité de ce $\overrightarrow{u}$ résultent immédiatement de la bijectivité supposée de $\overrightarrow{f} - id_E$.

C.Q.F.D

On va maintenant retrouver ce résultat d'une autre façon qui nous permettra d'avoir accès à la construction des points fixes que nous avons en vue.

Théorème 2. *Soit*

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

une application affine d'un espace affine $(\mathcal{E}, E)$ *(de dimension finie sur un corps* $\mathbb{K}$*) dans lui-même. Soit*

$$\rho : \mathcal{E} \longrightarrow E : m \mapsto \overrightarrow{mf(m)}$$

Alors

1. ρ *est une application affine.*
2. *Soit* $V = Im(\rho)$ *l'image de* ρ*. Alors* f *a des points fixes si et seulement si* V *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Démonstration. 1. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\rho(n)-\rho(m) & = & \overrightarrow{nf(n)}-\overrightarrow{mf(m)}\\ & = & \overrightarrow{nm}+\overrightarrow{mf(n)}-\overrightarrow{mf(m)}\\ & = & \overrightarrow{f(m)f(n)}-\overrightarrow{mn}\\ & = & \overrightarrow{f}(\overrightarrow{mn})-\overrightarrow{mn}\\ & = & (\overrightarrow{f}-id_E)(\overrightarrow{mn})\end{array}\right.$$

Ceci prouve que ρ est affine de partie linéaire : $\overrightarrow{\rho}=\overrightarrow{f}-id_E$.

2. Par suite $V=Im(\rho)$ est un sous-espace affine de E. Dire que V est un sous-espace vectoriel de E équivaut à $\overrightarrow{0}\in V$ c'est à dire à l'existence d'un point $o\in\mathcal{E}$ tel que $\rho(o)=\overrightarrow{of(o)}=\overrightarrow{0}$ c'est à dire à $f(o)=o$, o est un point fixe de f.

C.Q.F.D

Si $Fix(f)$ est non vide, alors $Fix(f)=\rho^{-1}(\overrightarrow{0})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $Ker(\overrightarrow{f}-id_E)$ comme on l'a déjà vu.

$V=E$ si et seulement si ρ est de dimension maximum c'est à dire si et seulement si $Ker(\overrightarrow{f}-id_E)=\overrightarrow{0}$ et f a alors un unique point fixe.

3 Une classification des bijections affines planes

On suppose dans ce qui suit que :

- $\mathcal{E}$ est un plan affine réel, essentiellement pour pouvoir faire des dessins.
- $f:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ est une application affine et bijective. Le cas où f est de rang 0 est un peu tristounet car f est alors une application constante d'image son point fixe évidemment. Le cas où f est de rang 1 est plus intéressant mais sera traité plus tard.

Le théorème précédent donne déjà une classification des bijections affines planes suivant la nature de leurs points fixes.

- Le rang de ρ est égal à 2 : $Ker(\overrightarrow{f}-id_E)=\overrightarrow{0}$ et f a un unique point fixe. C'est le cas générique en ce sens que ces bijections forment un ouvert dense dans l'ensemble des bijections affines.
- Le rang de ρ est égal à 1. $V=Im(\rho)$ est une droite affine et sa droite vectorielle associée est : $\overrightarrow{V}=Im(\overrightarrow{\rho})=Im(\overrightarrow{f}-id_E)=\mathbb{R}\overrightarrow{u}$. On a donc : $V=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{V}$ Il existe alors une forme affine $\varphi:E\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que :

  $$f(m)=m+\varphi(m)\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \tag{1}$$

  Notons que cette écriture n'est pas unique et dépend du choix de $\overrightarrow{v}\in V$. Par exemple si on remplace $\overrightarrow{v}$ par $\overrightarrow{v}'=\overrightarrow{v}-\lambda\overrightarrow{u}$, f s'écrit tout aussi bien :

  $$f(m)=m+\varphi'(m)\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}'$$

  où $\varphi'=\varphi+\lambda$.

Ainsi pour tout $\overrightarrow{w} \in E$, on a :

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$$

où $\overrightarrow{\varphi}$, partie linéaire de φ est une forme linéaire non nulle définie sur E. Il en résulte que la forme affine φ est surjective donc non constante. Alors

$$Ker(\overrightarrow{f} - id_E) = Ker(\varphi) = \overrightarrow{W}$$

On a deux possibilités :

1. $$\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u}) \neq 0$$
   $$\overrightarrow{u} \notin \overrightarrow{W}$$
   $\overrightarrow{V}$ est le sous-espace propre de $\overrightarrow{f}$ associé à la valeur propre $\alpha = 1 + \varphi(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{W}$ est le sous-espace propre de $\overrightarrow{f}$ associé à la valeur propre 1. On a :
   $$E = \overrightarrow{V} \oplus \overrightarrow{W}$$
   $\overrightarrow{f}$ est diagonalisable. On dit que $\overrightarrow{f}$ est une dilatation de rapport α.
2. $$\varphi(\overrightarrow{u}) = 0$$
   $$\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{W}$$
   $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{W}$ est le sous-espace propre de $\overrightarrow{f}$ pour la valeur propre 1. Si on choisit une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, alors la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans cette base est :
   $$\begin{Vmatrix} 1 & \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{v}) \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$
   prouvant que 1 est la seule valeur propre de $\overrightarrow{f}$ qui n'est pas diagonalisable puisque $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{v}) \neq 0$. On dit que $\overrightarrow{f}$ est une transvection vectorielle.

Dans le cas n°1 où $\overrightarrow{f}$ est diagonalisable, on a encore deux possibilités :

1. f a des points fixes : On a : $V = \overrightarrow{V}$ et on peut choisir dans (1) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Par suite, on a :
   $$f(m) = m + \varphi(m)\overrightarrow{u}$$
   $Fix(f)$ est la droite affine de $\mathcal{E}$ d'équation :
   $$\varphi(m) = 0$$
   Soit $m \in \mathcal{E}$ non fixé par f et soit D la droite affine joignant m à $f(m)$. D est de direction $\overrightarrow{V}$ et coupe $Fix(f)$ en un unique point a. En effet on doit avoir :
   $$\begin{cases} a &= m + t\overrightarrow{mf(m)} \\ &= m + t\varphi(m)\overrightarrow{u} \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$\varphi(a) = \varphi(m)(1 + t\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u})$$

Comme a est fixé par f, $\varphi(a) = 0$ et puisque $\varphi(m) \neq 0$, on a :

$$t = -\frac{1}{\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u})}$$

prouvant l'existence et l'unicité de a :

$$a = m - \frac{\varphi(m)}{\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u})}\overrightarrow{u}$$

ou encore :

$$\overrightarrow{am} = \frac{\varphi(m)}{\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u})}\overrightarrow{u}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{af(m)} = \overrightarrow{f(a)f(m)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{am}) = \alpha\overrightarrow{am}$$

car $\overrightarrow{am} \in \overrightarrow{V}$. On dit que f est une affinité (ou une dilatation affine) d'axe $Fix(f)$, de direction $\overrightarrow{V}$ et de rapport α.

2. f est sans point fixe : $Fix(f) = \emptyset$. V est une droite affine de E. Il existe donc $\overrightarrow{v} \in V; \overrightarrow{v} \notin \overrightarrow{V}$ tel que :

$$V = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$$

D'après (1), on a :

$$f(m) = m + \varphi(m)\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

$$f = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ g$$

où $\tau_{\overrightarrow{v}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ et g est l'affinité définie par :

$$g(m) = m + \varphi(m)\overrightarrow{u}$$

On peut cependant choisir $\overrightarrow{v}$ de la façon suivante pour obtenir ce qu'on appelle la décomposition canonique de f : Associé à la décomposition de E en somme directe :

$$E = \overrightarrow{V} \oplus \overrightarrow{W}$$

on a un isomorphisme :

$$E/\overrightarrow{V} \approx \overrightarrow{W}$$

Soit $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{W}$ le vecteur non nul de $\overrightarrow{W}$, image de $V = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{W} \in E/\overrightarrow{V}$ dans cet isomorphisme. Il existe donc une unique forme affine $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(m) = m + \varphi(m)\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$$

On vérifie alors aisément que :

$$f = \tau_{\overrightarrow{w}} \circ g = g \circ \tau_{\overrightarrow{w}}$$

f est le produit commutatif d'une affinité et d'une translation dont le vecteur dirige l'axe de l'affinité.

Dans le cas où f est non diagonalisable, on a toujours les deux possibilités :

1. f a des points fixes : On a : $V = \overrightarrow{V}$ et on peut choisir dans (1) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Par suite, on a :

$$f(m) = m + \varphi(m)\overrightarrow{u}$$

$Fix(f)$ est la droite affine de $\mathcal{E}$ d'équation :

$$\varphi(m) = 0$$

On dit que f est une transvection affine d'axe $Fix(f)$.

2. f est sans point fixe : $Fix(f) = \emptyset$. V est une droite affine de E. Il existe donc $\overrightarrow{v} \in V; \overrightarrow{v} \notin \overrightarrow{V}$ tel que :

$$V = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$$

D'après (1), on a :

$$f(m) = m + \varphi(m)\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

$$f = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ g$$

où $\tau_{\overrightarrow{v}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ et g est la transvection définie par :

$$g(m) = m + \varphi(m)\overrightarrow{u}$$

- Le rang de ρ est égal à 0. Alors $\overrightarrow{f} = id_E$.
  1. $f = id_{\mathcal{E}}$: tous les points de $\mathcal{E}$ sont fixes.
  2. $f = \tau_{\overrightarrow{u}}$ où $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$: f est une translation.

4 Le théorème préparatoire

On suppose dans ce qui suit que la bijection affine f n'est pas une homothétie-translation : ne parlons pas des translations qui sont sans points fixes ni de l'application identique $id_{\mathcal{E}}$ dont tous les points du plan le sont mais si f est une homothétie, la construction de son centre connaissant les images de 2 points (non alignés avec le centre) est trop connue pour être rappelée alors que la construction résultant du théorème suivant tomberait en défaut :

Théorème 3. *Soit $\overrightarrow{D}$ une droite vectorielle de E qui ne soit pas un sous-espace propre de $\overrightarrow{f}$. Soit $\mathcal{L}_{\overrightarrow{D}}$ l'ensemble des droites affines de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{D}$. Soit*

$$\phi : \mathcal{L}_{\overrightarrow{D}} \longrightarrow \mathcal{E};\ D \mapsto D \cap f(D)$$

Alors $Im(\phi)$ est une droite affine de $\mathcal{E}$
- *contenant $Fix(f)$ si $Fix(f) \neq \emptyset$*
- *ou bien de direction $Ker(\overrightarrow{f} - id_E)$ si $Fix(f) = \emptyset$.*

4.1 Une preuve à l'ancienne

Démonstration. Soit D une droite quelconque de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{D}$ et soit $D' = f(D)$. Compte tenu des hypothèses faites, ces deux droites se coupent en un point unique $x = D \cap D'$. On va montrer que le lieu de $x = D \cap D'$ est une droite.

- f admet une droite de points fixes L, cette droite est alors le lieu cherché. En effet, la direction $\overrightarrow{L}$ de L est le sous-espace propre de $\overrightarrow{f}$ pour la valeur propre 1. Donc $\overrightarrow{L}$ et $\overrightarrow{D}$ sont en somme directe et par suite L coupe D en un unique point $x = f(x) \in D \cap D'$.
- f a un unique point fixe o. Soient D_1 et D_2 deux droites distinctes de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{D}$ et soient $D'_1 = f(D_1)$ et $D'_2 = f(D_2)$ les droites images. Les points $x_1 = D_1 \cap D'_1$ et $x_2 = D_2 \cap D'_2$ sont donc distincts. On va montrer que le lieu de $x = D \cap D'$ est la droite $L = x_1x_2$.
  Soient
  $$x'_1 = f(x_1); \quad x'_2 = f(x_2)$$
  On peut toujours supposer que $x_1 \neq x'_1$. La droite $L = x_1x_2$ coupe D en un unique point x. Soit $x' = f(x)$. Si $x = x' = f(x)$, alors x est le point fixe o de f et $x = D \cap D'$ appartient bien à la droite x_1x_2. Sinon comme f est affine, on a :
  $$\frac{\overline{xx_1}}{\overline{xx_2}} = \frac{\overline{x'x'_1}}{\overline{x'x'_2}} \tag{2}$$
  L'égalité précédente montre d'après le théorème de Thalès que la droite xx' est parallèle à la droite $x_1x'_1 = D'_1$. Donc $xx' = D'$ et $x = D \cap D'$ appartient bien à la droite x_1x_2.
  Soit maintenant D la droite passant par o et de direction $\overrightarrow{D}$. Alors $D' = f(D)$ contient aussi o et $o = D \cap D'$ appartient bien à la droite x_1x_2.
- f est sans point fixe. Soit $L' = f(L) = x'_1x'_2$ et supposons que L et L' soient sécantes en un point o. D'après le théorème de Thalès, on a :
  $$\frac{\overline{ox_1}}{\overline{ox_2}} = \frac{\overline{ox'_1}}{\overline{ox'_2}} \tag{3}$$

D'autre part si $o' = f(o)$, on a aussi :

(4) $$\frac{\overline{ox_1}}{\overline{ox_2}} = \frac{\overline{o'x'_1}}{\overline{o'x'_2}}$$

puisque f est affine et conserve les rapports. Donc

(5) $$\frac{\overline{ox'_1}}{\overline{ox'_2}} = \frac{\overline{o'x'_1}}{\overline{o'x'_2}}$$

On aurait alors $o = o' = f(o)$, ce qui est absurde car f est sans point fixe. Les droites L et L' sont donc parallèles. Le quadrilatère $x_1x_2x'_2x'_1$ est un parallélogramme et on a donc :

$$\overrightarrow{x_1x_2} = \overrightarrow{x'_1x'_2} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_1x_2})$$

prouvant que $\overrightarrow{L}$ est le sous-espace propre de $\overrightarrow{f}$ pour la valeur propre 1.

C.Q.F.D

Notons que nous avons ainsi trois possibilités s'excluant mutuellement :

1. $$L' = f(L) = L$$

   L est la droite des points fixes de f.

2. $$L \nparallel L'$$

   Les droites L et L' ne sont pas parallèles. Le point $o = L \cap L'$ est alors l'unique point fixe de l'application f.

3. $$L \parallel L' \text{et } L \neq L'$$

   Les droites L et L' sont parallèles et distinctes . L'application f est alors sans point fixe et la direction $\overrightarrow{L}$ de L est le sous-espace propre de $\overrightarrow{f}$ pour la valeur propre 1.

4.2 Une preuve par la géométrie analytique

Soit $\overrightarrow{v}$ une base de $\overrightarrow{D}$. Le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$ est une base de $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{D})$. Le couple $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de E. Soit M la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans cette base. Elle a l'aspect suivant :

(6) $$M = \begin{Vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{Vmatrix}$$

Techniquement M est ce qu'on appelle une matrice compagnon de $\overrightarrow{f}$. Le polynôme caractéristique de $\overrightarrow{f}$ est :

(7) $$\chi = X^2 - a_{22}X - a_{12}$$

Par suite 1 est valeur propre de $\overrightarrow{f}$ si et seulement si :

$$a_{12} + a_{22} = 1 \tag{8}$$

Soit a un point quelconque du plan affine $\mathcal{E}$. Dans le repère cartésien $(a; (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}))$, les coordonnées (x', y') du point $m' = f(m)$, image par f du point m de coordonnées (x, y) sont données par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & a_{12}y + c_1 \\ y' & = & x + a_{22}y + c_2 \end{array} \right. \tag{9}$$

La droite D d'équation $Y = y$ a pour image par f la droite D' d'équation $X = a_{12}y + c_1$. Le point d'intersection de D et D' a donc pour coordonnées :

$$(a_{12}y + c_1, y)$$

dont le lieu est évidemment la droite L d'équation :

$$X - a_{12}Y - c_1 = 0 \tag{10}$$

Comme les coordonnées des points fixes éventuels de f vérifient les équations :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a_{12}y + c_1 \\ y & = & x + a_{22}y + c_2 \end{array} \right. \tag{11}$$

on voit que la droite L contient $Fix(f)$.

Maintenant si f est sans point fixe, le système précédent n'est pas de Cramer et s'écrit via l'équation (7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_{12}y + c_1 \\ x = a_{12}y - c_2 \end{array} \right. \tag{12}$$

Accessoirement, il sera sans solution si et seulement si $c_1 + c_2 \neq 0$. La droite L est dirigée par le vecteur de composantes $(a_{12}, 1)$ qui est bien un vecteur propre de $\overrightarrow{f}$ pour la valeur propre 1.

4.3 Une preuve par l'algèbre linéaire

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de $\overrightarrow{D}$ et soit $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{f}(\overrightarrow{D})$. Il est clair que $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$. On va prouver que $L = \rho^{-1}(\mathbb{R}\overrightarrow{w})$.

Soit $m = D \cap D'$. Alors $\rho(m) = \overrightarrow{mf(m)} \in \mathbb{R}\overrightarrow{w}$ prouvant que $L \subset \rho^{-1}(\mathbb{R}\overrightarrow{w})$.

Réciproquement, si $o \in Fix(f) = \rho^{-1}(\overrightarrow{0}) \subset \rho^{-1}(\mathbb{R}\overrightarrow{w})$, alors $o = f(o) \in D \cap D'$ et $o \in L$.

Soit maintenant $m \in \rho^{-1}(\mathbb{R}\overrightarrow{w})$ non fixé par f.

Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que : $\rho(m) = \overrightarrow{mf(m)} = \lambda \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$. Par suite si $m = f(n)$, on a : $\overrightarrow{nm} = \lambda \overrightarrow{v}$. Ainsi la droite $D = nm$ est de direction $\overrightarrow{D}$ et la droite $D' = f(D) = mf(m)$ de direction $\overrightarrow{D}'$. Tout ceci prouve que $\rho^{-1}(\mathbb{R}\overrightarrow{w}) \subset L$.

Donc $L = \rho^{-1}(\mathbb{R}\overrightarrow{w})$ et $Fix(f) \subset L$.

On a alors les 3 cas suivants :

- f a un unique point fixe o. Alors ρ est une bijection affine. L est la droite affine de $\mathcal{E}$ image de la droite vectorielle $\mathbb{R}\overrightarrow{w}$ par la bijection affine ρ^{-1}.
- f a une droite de points fixes $Fix(f)$.
  $\rho(m) = \varphi(m)\overrightarrow{u}$ et $Im(\rho) = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$.
  Alors
  $L = \rho^{-1}(\mathbb{R}\overrightarrow{w}) = \rho^{-1}(Im(\rho)\cap\mathbb{R}\overrightarrow{w}) = \rho^{-1}(\mathbb{R}\overrightarrow{u}\cap\mathbb{R}\overrightarrow{w}) = \rho^{-1}(\overrightarrow{0}) = Fix(f)$
  La droite L est la droite des points fixes de f.
- f est sans points fixes.
  On a donc : $\rho(m) = \varphi(m)\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}'$.
  Si $m \in L$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\rho(m) = \varphi(m)\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}' = \lambda\overrightarrow{w}$.
  Comme les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont linéairement indépendants, il existe deux scalaires α et β tels que : $\overrightarrow{u}' = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{w}$ prouvant que $\varphi(m) = -\alpha$. Par suite $L = \{m \in \mathcal{E} \quad \text{tels que } \varphi(m) = -\alpha\}$ prouvant que L est une droite affine de $\mathcal{E}$ de direction $Ker(\overrightarrow{\varphi}) = Ker(\overrightarrow{f} - id_E)$.

5 La construction des points fixes

L'idée est simple. On applique le théorème précédent pour deux directions distinctes $\overrightarrow{D_1} = \mathbb{R}\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{D_2} = \mathbb{R}\overrightarrow{v_2}$ (qui ne sont pas des sous espaces propres de $\overrightarrow{f}$).
Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont donc linéairement indépendants ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v_1})$ et $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v_2})$ puisque $\overrightarrow{f}$ est bijective.
On a alors les trois cas suivants :

- f a un unique point fixe o.
  Comme ρ est bijective et que les droites vectorielles $\mathbb{R}\overrightarrow{w_1}$ et $\mathbb{R}\overrightarrow{w_2}$ sont distinctes, les droites affines $L_1 = \rho^{-1}(\mathbb{R}\overrightarrow{w_1})$ et $L_1 = \rho^{-1}(\mathbb{R}\overrightarrow{w_2})$ le sont aussi et se coupent en leur unique point commun $o = \rho^{-1}(\overrightarrow{0})$.
- f a une droite de points fixes L.
  Alors $L_1 = L_2 = L$.
- f est sans points fixes. Des décompositions

  $$\left\{ \begin{array}{rcl} \overrightarrow{u}' & = & \alpha_1\overrightarrow{u} + \beta_1\overrightarrow{w_1} \\ & = & \alpha_2\overrightarrow{u} + \beta_2\overrightarrow{w_2} \end{array} \right.$$

  on déduit :

  $$\alpha_1 \neq \alpha_2$$

  sinon les vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ seraient liés, ce qui est absurde.
  Ainsi les droites

  $$\left\{ \begin{array}{rcl} L_1 & = & \{m \in \mathcal{E} \quad \text{tels que } \varphi(m) = -\alpha_1\} \\ & \text{et} & \\ L_2 & = & \{m \in \mathcal{E} \quad \text{tels que } \varphi(m) = -\alpha_2\} \end{array} \right.$$

sont parallèles et distinctes.
On en déduit la construction suivante :
Soit $ABCD$ un parallèlogramme de $\mathcal{E}$ dont les côtés AB et CD sont de direction $\overrightarrow{D_1}$ et les côtés BC et AD sont de direction $\overrightarrow{D_2}$. Soit $A'B'C'D'$ le parallélogramme image par f du parallélogramme $ABCD$. Les côtés correspondants de ces parallélogrammes se coupent respectivement en :

$$a = AB \cap A'B'; \quad b = BC \cap B'C'; \quad c = CD \cap C'D'; \quad d = DA \cap D'A'$$

Alors $L_1 = ac$ et $L_2 = bd$.
On a alors trois cas de figures :

- Les droites ac et bd se coupent en un seul point o.
  Le point o est l'unique point fixe de f.
- Les droites ac et bd sont confondues en une droite L.
  La droite L est la droite des points fixes de f.
- Les droites ac et bd sont parallèles et distinctes.
  f est alors sans points fixes et la direction commune des droites ac et bd est le sous-espace propre de $\overrightarrow{f}$ pour la valeur propre 1.

6 La démonstration de V.Thébault

Comme on l'a déjà dit, cette construction est connue depuis fort longtemps. Neuberg dans [3] la donne aussi sans démonstration tout en l'attribuant à M.Sollertinsky bien connu par ses contributions au Journal de Mathématiques Elémentaires de M. de Longchamps.

Ce n'est que dans [6] que j'ai trouvé enfin une démonstration de cette construction par le célèbre problémiste Victor Thébault (1882-1960). Par l'emploi de distances algébriques, ce dernier reste dans un cadre euclidien mais il n'est pas très difficile d'adapter son raisonnement dans un cadre affine en utilisant les aires algébriques. Pour cela on utilise le résultat suivant :

Théorème. *Soient D et D' deux droites du plan affine réel $\mathcal{E}$. Soient A et B deux points distincts de D et A' et B' deux points distincts de D'.*

Soit $\mathcal{F}$ le faisceau de droites engendré par D et D'. Alors pour tout couple $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$:

$$L = \{M \in \mathcal{E} \ \setminus \ \lambda \ S(A, B, M) + \lambda' \ S(A', B', M) = 0\}$$

est une droite de $\mathcal{F}$

Démonstration. Cela résulte du fait simple suivant : L'application

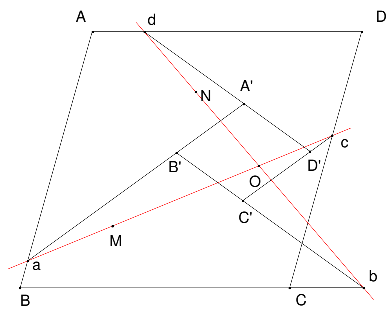
$$M \longrightarrow \lambda \ S(A, B, M) + \lambda' \ S(A', B', M)$$

est une forme affine non triviale. C.Q.F.D

Pratiquement, on utilisera ce théorème sous la forme suivante : Soit L une droite de $\mathcal{F}$, distincte de D et D'. Alors l'application

$$M \longrightarrow \frac{S(A', B', M)}{S(A, B, M)}$$

est constante.



Reprenant la configuration des deux parallélogrammes $ABCD$ et $A'B'C'D'$ et en supposant que les droites ac et bd se coupent en un point O, il s'agissait pour V.Thébault de montrer que O était un point fixe de l'application affine f envoyant $ABCD$ sur $A'B'C'D'$. Voici son raisonnement :

Démonstration. D'après le théorème précédent, la quantité $\frac{S(A', B', M)}{S(A, B, M)}$ ne dépend pas du point M de la droite ac. Ainsi on a :

$$\frac{S(A', B', M)}{S(A, B, M)} = \frac{S(A', B', c)}{S(A, B, c)}$$

Mais comme les droites $A'B'$ et $C'D'$ sont parallèles, on a :

$$S(A', B', c) = S(A', B', C')$$

De même comme les droites AB et CD sont parallèles, on a :

$$S(A, B, c) = S(A, B, C)$$

Donc pour tout point M de la droite ac, on a :

$$\frac{S(A', B', M)}{S(A, B, M)} = \frac{S(A', B', C')}{S(A, B, C)}$$

On fait un raisonnement analogue avec la droite bd. Pour tout point N de la droite bd, on a :

$$\frac{S(N, B', C')}{S(N, B, C)} = \frac{S(d, B', C')}{S(d, B, C)}$$

Mais comme les droites $A'D'$ et $B'C'$ sont parallèles, on a :

$$S(d, B', C') = S(A', B', C')$$

De même comme les droites AD et BC sont parallèles, on a :

$$S(d, B, C) = S(A, B, C)$$

Donc pour tout point N de la droite bd, on a :

$$\frac{S(N, B', C')}{S(N, B, C)} = \frac{S(A', B', C')}{S(A, B, C)}$$

En particulier pour le point O intersection des droites ac et bd, on a :

$$\frac{S(O, A', B')}{S(O, A, B)} = \frac{S(O, B', C')}{S(O, B, C)} = \frac{S(A', B', C')}{S(A, B, C)}$$

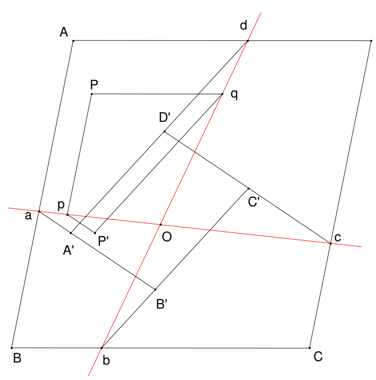
Compte tenu des égalités :

$$\begin{cases} S(O, A, B) + S(O, B, C) + S(O, C, A) & = & S(A, B, C) \\ S(O, A', B') + S(O, B', C') + S(O, C', A') & = & S(A', B', C') \end{cases}$$

on a :

$$\frac{S(O, A', B')}{S(O, A, B)} = \frac{S(O, B', C')}{S(O, B, C)} = \frac{S(O, C', A')}{S(O, C, A)} = \frac{S(A', B', C')}{S(A, B, C)}$$

prouvant que O a les mêmes coordonnées barycentriques dans les deux triangles ABC et $a'B'C'$. C.Q.F.D



Il est intéressant de noter que cette construction du point fixe que nous appellerons configuration de Thébault en son honneur donne l'image $P' = f(P)$ d'un point quelconque P du plan. En effet la parallèle à AB issue de P et la parallèle à $A'B'$ issue de P' se coupent en p sur la droite ac. De même la parallèle à BC issue de P coupe la parallèle à $B'C'$ issue de P' en q sur la droite bd. D'où la construction suivante de $P' = f(P)$: La parallèle à AB issue de P coupe ac en p. La parallèle à BC issue de P coupe bd en q. La parallèle à $A'B'$ issue de p coupe la parallèle à $B'C'$ issue de q en P'.

7 Les applications affines de rang 1

Evidemment la construction de Thébault tombe en défaut pour les applications affines de rang strictement inférieur à 2. Il n'y a rien à dire pour celles de rang 0 qui sont constantes. Le point image est évidemment l'unique point fixe d'une telle application. On va donc s'intéresser aux applications affines de rang 1.

Soit donc $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine de rang 1. L'image de f est une droite affine de $\mathcal{E}$, notée L. La partie linéaire $\overrightarrow{f} : E \longrightarrow E$ de f est aussi de rang 1 et admet 0 pour valeur propre. Le polynôme caractéristique de $\overrightarrow{f}$ est de la forme :

$$\chi = X(X - \lambda)$$

On a alors les cas suivants :

- $\lambda \neq 0$.

  La partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est donc diagonalisable : Les sous-espaces propres de $\overrightarrow{f}$ sont $Ker(\overrightarrow{f})$ pour la valeur propre 0 et $Im(\overrightarrow{f})$ pour la valeur propre λ.

  On a encore deux cas :

  - $\lambda \neq 1$

    f a un unique point fixe $O \in L$. Soit $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base de $\mathcal{E}$ où $\overrightarrow{u}$ est une base de $Im(\overrightarrow{f})$ et $\overrightarrow{v}$ une base de $Ker(\overrightarrow{f})$. On a :

    $$L = O + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$$

    Notons L' la droite définie par

    $$L' = O + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$$

    Dans cette base, l'application f s'écrit :

    $$(x, y) \mapsto (\lambda x, 0)$$

    Ceci montre que f est le produit commutatif de la projection π sur L parallèlement à L' et de l'affinité τ d'axe L', de direction L et de rapport λ.

  - $\lambda = 1$

    Toujours dans la base $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, f s'écrit :

    $$(x, y) \mapsto (x + a, 0)$$

    - $a = 0$.

      $f = \pi$, la projection sur L parallèlement à L' et L est une droite de points fixes.

    - $a \neq 0$.

      f est le produit commutatif de la projection π et de la translation de vecteur $a\overrightarrow{u}$ dirigeant L. f est sans point fixe.

  - $\lambda = 0$

    Comme $\overrightarrow{f}$ est de rang 1, $\overrightarrow{f}$ n'est pas diagonalisable. Il est donc nilpotent. $\overrightarrow{f}^2 = 0$. L'application f^2 est donc constante et f a un unique point fixe O, à savoir le point image de f^2.

8 La construction des points fixes d'une application affine f de rang 1

On se donne trois points non alignés A, B, C et leurs images respectives par f : A', B', C' alignées sur une droite L. L'idée générale est la suivante : les points fixes de f sont exactement ceux de la restriction $f_{|L}$ de f à la droite $L = Im(f)$. On est ainsi ramené au problème connu de la détermination des points fixes d'un endomorphisme affine d'une droite. Il suffit pour cela de connaître les images par f de deux points distincts de L.

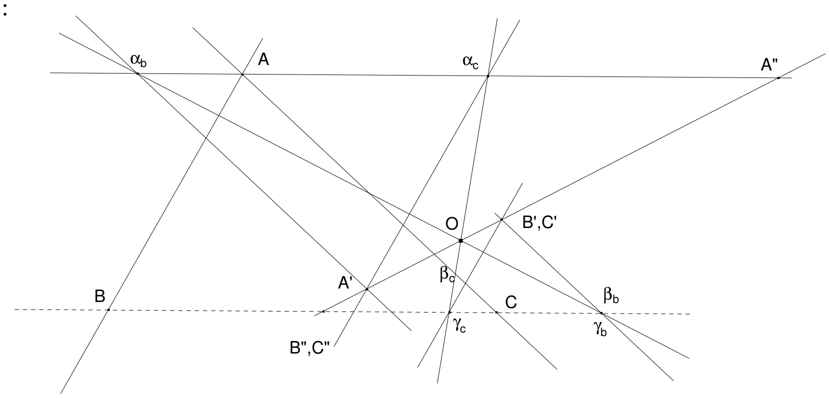
On va traiter d'abord un cas particulier auquel se ramènera le cas général, à savoir celui où deux des trois points A', B', C' sont confondus, les trois ne peuvent l'être sinon f serait constante. On peut donc toujours supposer que $B' = C' \neq A'$. Comme $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{B'B'} = \overrightarrow{0}$, on a donc :

$$Ker(\overrightarrow{f}) = \mathbb{R}\ \overrightarrow{BC}$$

De plus

$$Im(\overrightarrow{f}) = \mathbb{R}\ \overrightarrow{A'B'}$$

On a donc les deux cas suivants :



- Les droites BC et L sont concourantes en un point $B'' = C''$; c'est le cas où $\overrightarrow{f}$ est diagonalisable. Comme $\overrightarrow{BB''} \in Ker(\overrightarrow{f})$, on a :

  $$f(B'') = f(B) = B'$$

  On mène alors la parallèle à BC passant par A coupant L en A'' et on a puisque $\overrightarrow{AA''} \in Ker(\overrightarrow{f})$:

  $$f(A'') = f(A) = A'$$

  Soit $g = f_{|L}$. On est ainsi ramené au problème connu de construire les points fixes de g tel que $g(A'') = A'$ et $g(B'') = g(C'') = B' = C'$.
  g se prolonge en une homothétie-translation du plan qu'on notera encore g. Pour simplifier la figure, il est préférable d'utiliser des droites déjà tracées.

Par exemple si α_b est à l'intersection de la parallèle à AC issue de A' avec AA'' qui est la parallèle à BC issue de A'', le point $\beta_b = \gamma_b = g(\alpha_b)$ est à l'intersection de la parallèle à AC issue de $B' = C'$ avec la parallèle à BC issue de $B'' = C''$ qui n'est autre que la droite BC. Suivant que la droite $\alpha_b\beta_b\gamma_b$ coupe L en un point O ou bien est confondue avec L ou bien est parallèle à L en lui étant distincte, O est le point fixe de f ou bien L est une droite de points fixes ou bien f est sans point fixe.

On aurait pu tout aussi bien partir de α_c à l'intersection de la parallèle à AB issue de A' avec AA'' qui est la parallèle à BC issue de A'', le point $\beta_c = \gamma_c = g(\alpha_c)$ est à l'intersection de la parallèle à AB issue de $B' = C'$ avec la parallèle à BC issue de $B'' = C''$ qui n'est autre que la droite BC. Ainsi suivant que les droites $\alpha_b\beta_b\gamma_b$, $\alpha_c\beta_c\gamma_c$ et L sont concourantes en un point O ou bien sont confondues ou bien sont parallèles et distinctes, f aura O pour unique point fixe ou bien aura L pour droite de points fixes ou bien sera sans point fixe.

- Les droites BC et L sont parallèles ; c'est le cas où $\overrightarrow{f}$ n'est pas diagonalisable. La restriction $f_{|L}$ est une application constante d'image le point fixe O de f. Pour récupérer O, il suffit de construire l'image d'un point quelconque de L.

  Par exemple on regarde la restriction $f_{|AC}$ de f à la droite AC coupant L en v. Elle induit une bijection affine de AC sur L et $f_{|AC}(v) = f(v) = O$. Le point O s'obtient donc comme intersection de l'axe de $f_{|AC}$ avec L. Cet axe est la droite $\alpha_b\beta_b$ où α_b est l'intersection de la parallèle à BC issue de A avec la parallèle à AC issue de A' et β_b est l'intersection de la la parallèle à BC issue de B c'est à dire la droite BC avec la parallèle à AC issue de B'. On aurait pu aussi utiliser la restriction $f_{|AB}$ de f à la droite AB montrant que O est ausi sur l'axe $\alpha_c\beta_c$ de $f_{|AB}$ où α_c est l'intersection de la parallèle à BC issue de A avec la parallèle à AB issue de A' et β_c est l'intersection de la la parallèle à BC issue de C c'est à dire la droite BC avec la parallèle à AB issue de B'.

Regardons maintenant le cas général où les points A', B', C' sont distincts deux à deux. Pour se ramener aux cas précédents, il suffit de déterminer $Ker(\overrightarrow{f})$.

Par exemple on regarde la restriction $f_{|BC}$ de f à la droite BC. C'est une bijection affine de BC sur L. Il existe donc un unique point $a \in BC$ tel que $f(a) = A'$. La construction de a se fait de la façon habituelle via l'axe de $f_{|BC}$. Ainsi $f(A) = f(a) = A'$ prouvant que $\overrightarrow{Aa} \in Ker(\overrightarrow{f})$. On aurait tout aussi bien pu construire le point $b \in CA$ tel que $f(b) = B'$ et le point $c \in AB$ tel que $f(c) = C'$. Evidemment les droites Aa, Bb, Cc sont parallèles de direction $Ker(\overrightarrow{f})$.

On est donc ramené aux cas précédents par exemple en utilisant l'image par f des triangles AaB, AaC, BbA, BbC, CcA, CcB, on a que l'embarras du choix. On laisse au lecteur le soin de commenter et de déchiffrer les figures donnant la construction de O dans le cas général.

9 La droite de Newton

On va montrer ici comment les idées précédentes permettent de redémontrer le théorème de la droite de Newton et de préciser un peu plus cette cèlèbre configuration.

On se donne donc un triangle et une transversale $A'B'C'$ avec naturellement $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Soit f l'application affine de rang 1 telle que :

$$f(A) = A'; \quad f(B) = B'; \quad f(C) = C'$$

On va déterminer l'image $A'' = f(A')$. Pour cela on utilise la restriction f_a de f à la droite BC. C'est une bijection affine entre les droites BC et $B'C'$ dont on va déterminer l'axe. On complète les parallèlogrammes $BA'B'\alpha_b$ et $CA'C'\alpha_c$. L'axe en question est alors la droite $\alpha_b\alpha_c$. Comme c'est aussi l'axe d'homographie, les droites BC' et $B'C$ se coupent en A sur cet axe.

Via l'homothétie de centre A' et de rapport $\frac{1}{2}$, on voit que les milieux α de AA', β de α_bA' et γ de α_cA' sont alignés.

Mais compte tenu des parallélogrammes $BA'B'\alpha_b$ et $CA'C'\alpha_c$, on voit que β est aussi le milieu de BB' et γ celui de CC'. C'est le fameux théorème de Newton : les points α, β, γ sont alignés sur une droite L' appelée droite de Newton ou suivant une terminologie un peu désuète : les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés.

L'axe affine $A\alpha_b\alpha_c$ de f_a coupe BC en un point a et la droite L en un point A''.

$$f(a) = f(A) = A' \text{ et } f(A') = A''$$

Par suite :

$$\overrightarrow{Aa} \in Ker(\overrightarrow{f})$$

Ainsi tous les points de la droite Aa et en ârticulier le point A'' ont la même image par f, à savoir A' :

$$f(A'') = A'$$

Ainsi la restriction f_a de f à la droite L échange A' et A''. C'est donc une symétrie centrale par rapport au milieu O de $A'A''$. Ce point O est l'unique point fixe de f ; il est situé à l'intersection de la droite de Newton L' et de L.

Sur la figure, on a effectué les mêmes raisonnements en utilisant les restrictions f_b et f_c de f aux droites CA et ABdont les axes sont respectivement $B\beta_c\beta_a$ et $C\gamma_a\gamma_b$ tous deux parallèles à la droite de Newton $\alpha\beta\gamma$.

f est le produit commutatif de la projection sur L parallèlement à la droite de Newton L' et de la symétrie affine d'axe L' parallèlement à L.

Références

[1] H.S.M Coxeter. *Introduction to GEOMETRY.* John Wiley, 1961.

[2] Jean Frenkel. *Géométrie pour l'élève-professeur.* Hermann, 1973.

[3] J.Neuberg. *Sur les équicentres de deux systèmes de n points*, 1913. Mémoires de la Société des Sciences de Liège, 3°série,t.X.

[4] Eugène Rouché and Charles de Comberousse. *Traité de Géométrie, deuxième partie, Géométrie dans l'Espace.* Gauthier-Villars, 1900.

[5] Claude Tisseron. *Géométries affine, projective et euclidienne.* Hermann, 1983.

[6] V.Thébault. *Parmi les belles figures de la géométrie dans l'espace.* Vuibert, 1955.